

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

И Т О Г И Н А У К И • Ю Г Р О С С И И

С Е Р И Я
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОНОГРАФИЯ

В ы п у с к 5

И. И. ШАРАПУДИНОВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ
ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ
В ПОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА
С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Владикавказ
2012

ББК 518.3
УДК 22.193
Ш-25

Ответственный редактор
д. ф.-м. н., профессор А. Г. КУСРАЕВ

Рецензенты:
д. ф.-м. н., профессор А. К. РАМАЗАНОВ,
к. ф.-м. н., доцент З. Г. МЕДЖИДОВ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 07-01-00143-а, № 10-01-00191-а.

Шарапудинов И. И.

Некоторые вопросы теории приближений в пространствах Лебега с переменным показателем / отв. ред. А. Г. Кусраев.—Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, 2012.—267 с.—(Итоги науки. Юг России. Математическая монография. Вып. 5).

Излагаются основы интенсивно развивающейся теории пространств Лебега с переменным показателем. Рассмотрены некоторые вопросы теории приближений в таких пространствах. Получены необходимые и достаточные условия на переменный показатель, соблюдение которых гарантируют базисность таких классических ортонормированных систем, как система Хаара, тригонометрическая система, система полиномов Лежандра. Показано, что если переменный показатель удовлетворяет условию Дини — Липшица, то семейства классических операторов Фейера, Абеля, Стеклова, Джексона и др. равномерно ограничены. Это обстоятельство играет решающую роль при доказательстве прямых и обратных теорем теории приближений.

Книга может быть полезна специалистам по теории функций и функциональному анализу, теории приближений, инженерам и программистам, занимающимся обработкой сигналов и изображений, студентам и аспирантам, интересующимся приложениями математических методов к решению современных проблем сжатия изображений.

ISBN 978-5-904695-14-9

© Южный математический институт
ВНИЦ РАН и РСО-А, 2012
© И. И. Шарапудинов, 2012

ВВЕДЕНИЕ

Пространства функций, интегрируемых с переменным показателем, перестали играть роль экзотических примеров, так называемых модулярных пространств, и вышли на самостоятельный путь развития с того момента, когда было показано, что топология этих пространств нормируема, и одна из эквивалентных норм определяется с помощью хорошо известной теоремы А. Н. Колмогорова о нормируемости линейных топологических пространств, в которых существует ограниченная уравновешенная выпуклая окрестность нуля. Для таких пространств А. Н. Колмогоровым еще в 30-ых гг. XX-го столетия в работе [283] была введена норма с помощью функционала Минковского упомянутой выше окрестности. Такие нормы многие авторы называют *нормами Люксембурга*. Именно на этом пути автором этих строк в 1976 г. было показано (см. [19]), что пространство $L_\mu^{p(x)}(E)$, состоящее из измеримых на E функций $f(x)$, для которых степень $|f(x)|^{p(x)}$ интегрируема на E , при $p(x) \geq 1$ представляет собой нормированное пространство с нормой для $f \in L_\mu^{p(x)}(E)$, равной

$$\begin{aligned} \|f\|_{p(\cdot)} &= \|f\|_{p(\cdot)}(E) = \\ &= \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_E \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} \mu(dx) \leq 1 \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Следует отметить, что в [19] основное внимание уделялось случаю, когда $E = [0, 1]$, а мера μ совпадает с мерой Лебега на $[0, 1]$, и одновременно отмечалось, что основные результаты остаются в силе для произвольного множества E , на котором задана мера Лебега μ , не исключая важный частный случай, когда $E \subset \mathbb{R}^n$ с обычной мерой Лебега. Много внимания в [19] было уделено двойственным для $L_\mu^{p(x)}(E)$ пространствам $L_\mu^{p'(x)}(E)$, где $1/p(x) + 1/p'(x) = 1$, в том числе и в случае, когда переменный показатель $p'(x)$ не является существенно ограниченной функцией на E . Такая ситуация немед-